Université Abdelmalek Éssaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 — Année: 2019/2020

Sol. de TD:Suites et Séries de Fonctions

séries $N°3$(Partie 1)

Professeur A. MOUSSAID

Exercice 1

Etudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer, dans chaque cas la fonction, limite simple de ces suites:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{nx+2}{1+nx^2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_n(x) = n\ln(1+\frac{x}{n})$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$
5. $\forall x \in [0,2] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

Solution

1- On a $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ Soit x_0 un réel et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique de terme général $f_n(x) = \frac{x_0}{x_0^2+n^2}$
-Si $x_0 = 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite nulle et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.
-Si $x_0 \neq 0$, on a $f_n \sim \frac{x_0}{n^2}$ et, par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.
On en déduit $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$ alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2- $\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{nx+2}{1+nx^2}$

* Les notations utilisées dans les autres suites suivants (2,3,4,5) sont celles de 1.

-Si $x_0 = 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f_n(0) = 2$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 2$
- Si $x_0 \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N} \qquad f_n \sim \frac{nx_0}{nx_0^2}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{x_0}$
On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

3-$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_n(x) = n\ln(1+\frac{x}{n})$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n \sim n.\frac{x_0}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = x_0$.
La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = x$$

4- On a $\forall x \in \mathbb{R}^+ \qquad f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$

On a $f_n(x_0) = e^{n\ln(1+\frac{x_0}{n})}$ et $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+, \qquad \lim\limits_{n\to+\infty}[n\ln(1+\frac{x_0}{n})] = x_0$

La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, il en résulte $\lim_{n\to+\infty} f_n(x_0) = e^{x_0}$. La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = e^x$$

5- On a $\forall x \in [0,2] \qquad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$

* Si $x_0 \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} x_0^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(1+x_0^n) = 1$
Il en résulte, si $x_0 \in [0,1[\qquad \lim_{n\to+\infty} f_n = 0$

*$x_0 = 1$, on a $\forall n \qquad f_n = \frac{1}{2}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n = \frac{1}{2}$

*Si $x_0 \in]1,2]$, on a $\lim_{n\to+\infty} x_0^n = +\infty$ et donc $f_n \sim \frac{x_0^n}{x_0^n}$
Il en résulte $\lim_{n\to+\infty} f_n = 1$.
En résumé, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,2]$ vers la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases}$$

Remarque.
On constate sur ces exemples que la limite simole d'une suite de fonction continues peut être une fonction discontinue et que la limite simple d'une suite de fonctions discontinues peut être une fonction continue.

Exercice 2
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définies par:*

$$\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^7}$$

Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas Uniformément sur* $[0,1]$

Solution

On a $\forall x \in [0,1] \qquad f_n(x) = \frac{n^2x^3}{1+n^2x^7}$
On montre immédiatement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^4} \quad$ si $\quad x \neq 0, \qquad f(0) = 0$
Pour tout n, f_n est une fonction continue.
La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
La fonction f n'est pas continue sur $[0,1]$, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 3
Soit α *un réel.*
Discuter suivant les valeurs de α *la convergence uniforme sur* $\mathbb{R}$ *de la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies par:*

$$f_n(x) = 0 \quad si \quad x \neq 0, \qquad f_n(n) = n^\alpha$$

Solution

On a la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle si $\alpha < 0$
donc $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = n_\alpha$ et $(\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0) \Leftrightarrow (\alpha <)$
On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle si, et seulement si , $\alpha <)$

Exercice 4
Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ *de la suite de fonction* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définies sur* $[0,1]$ *par:*

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$$

Solution

On a :
-Si $x \in [0,1[$, On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$
-Si $x = 1$, on a $\forall n, \quad f_n(1) = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = 0$
Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

On a
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |x^n\sqrt{1-x^2}|$$
La fonction $x \mapsto x^n\sqrt{1-x^2}$ est différentiable sur $]0,1[$ et la fonction dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x^2}}[n-(n+1)x^2]$.
On en déduit
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\sqrt{\frac{n}{n+1}})$$
De $\forall x \in [0,1], \qquad x^n \leq 1$ et de $\sqrt{1-(\sqrt{\frac{n}{n+1}})^2} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$ il résulte que :
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1+n}}$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+n}} = 0$, donc la suite$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 5
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonction définies sur $[0,1]$ par:
$$f_n(x) = x^n$$

1. *Montrer que cette suite converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ avec $a < 1$*
2. *Étudier la convergence uniforme de ctte suite sur $[0,1[$*

Solution

1- Pour tout $x \in [0,a]$, avec $a < 1$, on a $0 \leq x < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, donc f_n converge simplement sur $[0,a]$ vers la fonction nulle sur $[0,a]$.

La fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit
$$\sup_{[0,a]} |f_n(x)| = a^n$$
De $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$, il résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction nulle sur $[0,a]$.

2- Pour tout $x \in [0,1[$, on a $0 \leq x < 1$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$, donc f_n converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction nulle sur $[0,1[$.
on a
$$\sup_{[0,1[} |f_n(x)| = 1^n = 1$$
donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

Exercice 6
Pour tout réel x et pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose
$$f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$$

1. *Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, mais ne convege pas uniformément.*
2. *Soit g_n le restriction de f_n à l'intervalle $[0,+\infty[$.*
   Étudier la convergence uniforme de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0,+\infty[$.

Solution

1- On a $f_n(x) = \frac{1}{1+(x+n)^2}$ d'où $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$
Il en résulte $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
On a

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)|$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f_n'(x) = -\frac{2(x+n)}{[1+(x+n)^2]^2}$

***Tableau de variations**

x	$-\infty$		$-n$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit que $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = 1$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

2- la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, vers la fonction nulle. On a

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |g_n(x) - 0| = \sup_{\mathbb{R}^+} |g_n(x)|$$

La fonction g_n est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g_n(x) \leq g_n(0)$. Il en résulte:

$$\sup_{\mathbb{R}^+} |g_n(x)| = g_n(0) = \frac{1}{1+n^2}$$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0$, on déduit que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7
On considère la suite de fonctin définies sur $[0,1]$ *par:*

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$$

1. *Etudier la convegence simple de* (f_n) *sur* $[0,1]$
2. *Montrer de* (f_n) *converge uniformément sur* $[a,1]$ *où* $a \in]0,1[$.
3. *Montrer de* (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$ *d'abord en calculant* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$, *ensuite en comparant*

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

Solution

1- On a $\forall x \in [0,1]$, $\quad f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$
Alors $f_n(0) = 0 = f_n(1)$
On a
$\forall x \in]0,1[$, $\quad f_n(x) = n^2 x(1-x)^n = n^2 x e^{n\ln(1-x)} = \frac{x}{\ln^2(1-x)} [n\ln(1-x)]^2 e^{n\ln(1-x)}$
comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1-x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} [n\ln(1-x)]^2 e^{n\ln(1-x)} = 0$
donc, la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonctio nulle.

2- Soit $a \in]0,1[$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

(*) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < a$
D'autre part, f_n est dérivable sur $[0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$f_n^{'}(x) = n^2(1-x)^{n-1}[1-(1+n)x]$$

D'où le tableau de variation:

x	0		$\frac{1}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{n+1})$	$\searrow$	0

avec $f_n(\frac{1}{n+1}) = n(\frac{n}{n+1})^{n+1}$
Si on considére les entiers n vérifiant $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < a$
Et $\forall x \in [a,1], \quad 0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$
Or, on a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(a) = 0$ (d'après 1)
Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{[a,1]} |f_n(x)| = 0$$

Par conséquent la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,1]$ avec $a \in]0,1[$

3-D'après le tableau de variation, on a:

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,1]}|f_n(x)| &= f_n(\frac{1}{n+1}) \\
&= n(\frac{n}{n+1})^{n+1} \\
&= n(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \\
&= ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{[0,1]}|f_n(x)| \sim_{n \to \infty} \frac{n}{e}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{[0,1]} |f_n(x)| = +\infty$$

par suite (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$

On peut obtenir ce résultat en montrant que

$$\int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

On a $\int_0^1 \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)dx = 0$
En faisant une intégration par partie, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 n^2x(1-x)^n dx \\
&= [\frac{-n^2x(1-x)^{n+1}}{n+1}]_0^1 + \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1}dx \\
&= -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}[(1-x)^{n+2}]_0^1 \\
&= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = 0 \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1$$

Exercice 8

Pour $x \geq 0$ on pose que $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$

1. *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$*
2. *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$*
3. *Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$* $\quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2+n^2} \geq \frac{1}{5}$
4. *En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$*
5. *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$*
6. *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$ converge normalement sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$*
7. *Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$ ne convergence pas normalement sur $\mathbb{R}^+$*

Solution

1- On a $\forall x \geq 0 \qquad f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$
- Pour $x = 0$ on a $f_n(0) = 0$ qui est aussi le terme général d'une série convergente.
- Pour $x > 0$ on a $f_n(x) \sim_{n\to+\infty}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.

2- On va prouver la convergence normale. On a en effet, pour tout $x \in [0, a]$ avec $a > 0$

$$|f_n(x)| \leq \frac{a}{n^2}$$

Comme la série de terme général $V_n = \frac{a}{n^2}$ avec $a > 0$ est convergente (série de Rieman $\alpha = 2 > 1$).

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ convergente normale alors elle est convergente uniformément sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a > 0$

3- Il suffit d'écrire que, pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2+k^2 \leq 5n^2$ et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5n}$.
On a obtient finalement

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2+n^2} \geq n.\frac{1}{5n} = \frac{1}{5}$$

4- On montre la non-convergence uniforme par l'absurd, i.e Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \geq 0$, on ait

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

En particulier, pour $x = n$ on doit avoir

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) < \varepsilon$$

Mais

$$\varepsilon \geq \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \frac{1}{5} \qquad \text{d'après -3}$$

Bien sûr, si $\varepsilon < \frac{1}{5}$, c'est impossible.

Rq:
Cette partie de la démonstration est souvent rédigée en niant le critére de Cauchy uniforme.

5- Nous allons prouver la convergence uniforme en utilisant le critÃ¨re des séries alternées.
En effet, à x fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est positive, décroissante et tend vers 0.
La séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n(x)$ est donc convergente, et on a la majoration du reste:

$$|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k f_k(x)| \leq f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$$

Reste à majorer le membre de droite de l'équation précédente par un terme qui tend vers 0 et ne dépend pas de x Mais on a:

$$\frac{x}{n^2 + x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2 + n^2}}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \leq \frac{1}{n} \qquad (x \geq 0)$$

On a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

6- Puisque $|(-1)^n f_n(x)| = |f_n(x)|$. la convergence normale sur $[0, a]$ avec $a > 0$ se démontre comme ci-dessus.

7-D'autre part, si on avait convergence normale sur $\mathbb{R}^+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la quatriéme question.

Exercice 9
Étudier la convergence normale des séries de fonctions de terme général:

1. $f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+x^2)}$, $\quad \alpha > 1$, *et* $\quad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$
2. $g_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{x^2+n^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}$
3. $h_n(x) = \frac{1}{n^2+\cos(nx)}$, $\quad n \geq 2$ *et* $\quad x \in \mathbb{R}$

Solution

1- $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{*+}$,,

$$0 < f_n(x) \leq \frac{1}{xn^\alpha} \leq \frac{1}{an^\alpha} \qquad \alpha > 1$$

La convergence de la série de Rieman $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ entraine la convergence normale sur $[a, b]$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

2- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; On a:

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

par conséquent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ converge normelement sur $\mathbb{R}$.

3- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; On a:

$$|h_n(x)| \leq \frac{1}{n^2-1}$$

comme

$$\frac{1}{n^2-1} \sim_{\infty} \frac{1}{n^2}$$

comme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ est une série convergente, alors $\sum_{n=2}^{+\infty} h_n(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

■